Un logiciel pour apprendre à résoudre des exercices de dénombrement

Hélène GIROIRE[1], Françoise LE CALVEZ[2], Jacques DUMA[3], Gérard TISSEAU[1], Marie URTASUN[2]

http://www.math-info.univ-paris5.fr/combien

[1]Equipe SysDef - LIP6, Université Paris6, 8 rue du capitaine Scott, 75015 Paris
Mél : <Prénom>.<Nom>@lip6.fr
[2] CRIP5, Université René Descartes, 45 rue des Saints Pères, F-75270 Paris Cedex 06
Mél : <Prénom>.<Nom>@math-info.univ-paris5.fr
[3] Lycée technique Jacquard, 2 rue Bouret, F-75019 Paris. Mél : dumajd@club-internet.fr

Résumé

Dans le cadre du projet Combien? nous avons construit des interfaces pédagogiques pour apprendre à résoudre des problèmes de dénombrement. Nous présentons rapidement la méthode de résolution sur laquelle reposent ces interfaces. Nous avons classé les problèmes de dénombrement en fonction de leurs schémas de résolution. Chaque interface correspond à une classe de problèmes. Elle permet à l'élève de résoudre et détecte incrémentalement les erreurs commises. Nous indiquons ensuite la progression pédagogique liée à l'utilisation de ces interfaces. Nous présentons alors les différentes expérimentations réalisées avec différents types de public.
Mots-clés : Environnement d'apprentissage, interface pédagogique, modélisation, résolution de problèmes, détection d'erreurs, expérimentation, dénombrement.

Abstract

In the Combien? project, we built pedagogical interfaces to help students learn combinatorics. First, we present the solving method on which these interfaces are based. Combinatorics problems are classified according to their solving schemata. Each interface corresponds to a class of problems. It allows the student to build a solution and detects the errors incrementally. Then, we show the pedagogical progression inherent to the use of these interfaces. Finally we describe the experiments in different context (learners, teachers, ergonomist).
Keywords : Learning environment, pedagogical interface, modelling, problem solving, error detection, experiment, combinatorics.

Introduction

Le projet "Combien ?" a pour but de définir une méthodologie de conception de différents composants d'un EIAH (Environnement Interactif d'Apprentissage Humain). Pour valider nos réflexions, nous réalisons un système pédagogique d'aide à l'apprentissage humain dans le domaine mathématique des dénombrements. L'objectif n'est pas tellement de former des experts en dénombrement, c'est-à-dire capables de déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, mais plutôt d'entraîner les élèves à la modélisation et de les rendre capables de représenter une situation par une structure complexe. Cette capacité est essentielle dans les activités de conception, comme l'atteste l'importance croissante accordée actuellement aux méthodes de modélisation en génie logiciel. Nous pensons que les exercices de dénombrement sont un bon point de départ pour cela et que la même démarche se retrouve dans d'autres domaines comme les probabilités et l'algorithmique.

Nous avons défini les fondements mathématiques d'une méthode de résolution "la méthode constructive" adaptée aux conceptions usuelles des élèves et permettant d'accéder à la théorie mathématique du domaine (Tisseau, Giroire, Le Calvez, Urtasun, and Duma 2000). Nous avons défini une classification des problèmes du domaine et les schémas de résolution associés aux différentes classes. Nous avons introduit pour chaque classe une "machine à construire une solution". Chaque machine se présente pour l'élève sous forme d'une interface pédagogique qui le conduit à construire la solution d'un exercice de la classe considérée. Nous présentons ensuite diverses expérimentations réalisées avec différents types de public.

Méthode Constructive

Les exercices de dénombrement de la classe de terminale sont de la forme : "Etant donnés des ensembles servant de référentiels, compter dans un certain univers les éléments vérifiant des contraintes de sélection". Il est possible de calculer le cardinal de l'ensemble à dénombrer sans énumérer ses éléments, mais simplement en raisonnant sur la façon dont on pourrait les énumérer. En effet, la liste des éléments peut être donnée comme le résultat de l'exécution d'un algorithme d'énumération et une méthode efficace de dénombrement consiste à expliciter cet algorithme et à l'analyser pour prévoir combien d'éléments il va engendrer, sans qu'il soit nécessaire de l'exécuter : c'est ce que nous avons appelé la "méthode constructive". C'est cette démarche que nous voudrions voir suivre par l'élève. Elle est d'ailleurs fréquemment utilisée par les élèves et dans les manuels mais de manière informelle et implicite, ce qui crée des difficultés. La méthode a l'avantage de permettre l'élaboration d'une démonstration rigoureuse des solutions mais elle exige une modélisation préalable de l'énoncé et utilise des concepts mathématiques encore peu familiers des élèves du niveau considéré.

Classification des problèmes et interfaces

L'observation de certains experts montre qu'ils connaissent des classes de problèmes classiques et qu'ils savent leur associer des schémas valides de définitions constructives et injectives. Ils procèdent en déterminant la classe du problème par l'analyse de son énoncé puis instancient le schéma associé pour engendrer la définition constructive équivalente. L'intérêt de cette méthode est qu'elle garantit la validité des solutions lorsqu'elle est applicable.
Nous avons élaboré une classification des problèmes de dénombrement en vue de la résolution (Le Calvez, Urtasun, Tisseau, Giroire, and Duma 1997). A chaque classe de problèmes nous avons associé une machine à construire une solution. Le raisonnement sur les différentes étapes de la construction permet de calculer le nombre d'éléments de l'ensemble à dénombrer.

Progression Pédagogique

Les machines sont prévues pour être utilisées en quasi autoformation. Un manuel d'utilisation est attaché à chaque machine. L'aide contextuelle correspondante est proposée aux différentes étapes de la construction de la solution.
L'élève a, à sa disposition, les machines correspondant à chaque classe. Ces machines contiennent chacune des exercices appropriés. L'élève peut ainsi apprendre à reconnaître la classe des exercices. La classe de l'exercice ne se reconnaît pas immédiatement à partir de l'énoncé. Par exemple, les exercices : "Dans un groupe de 10 personnes, combien y a-t-il de façons de choisir un président, un trésorier, deux secrétaires ?" et "Combien y a-t-il de mots de 10 lettres prises dans l'ensemble {p, t, s, r} et contenant 1 p, 1 t, 2 s ?" font partie de la même classe "Construction-liste". Lorsque l'élève aura appris à reconnaître la classe d'un problème, il lui sera présenté une machine générale à partir de laquelle il devra spécifier la classe de problème pour pouvoir résoudre.

Réalisation : les machines à construire

Nous avons défini et réalisé un éditeur d'interfaces EDIREC pour créer des machines spécifiées par des interacteurs. En utilisant EDIREC, nous avons réalisé les machines correspondant aux classes "Construction-ensemble", "Construction-liste", "Construction-association". La figure 1 présente la machine "Construction-ensemble" au cours de l'élaboration de la solution de l'exercice n°9. Le contrôle de l'activité est partagé entre la machine et l'élève. Toutes les machines se présentent sous la même apparence.

Construction de la solution

Chaque machine se présente pour l'élève sous forme d'une interface pédagogique qui le conduit à construire par étapes successives la solution d'un exercice de la classe considérée (définition de l'univers puis des différentes étapes de définition des contraintes). Cette solution est représentée sous forme d'une arborescence dont les nœuds sont valués par des objets du modèle conceptuel du domaine que nous avons défini (Tisseau, Giroire, Le Calvez, Urtasun, and Duma 2000). A chaque validation de l'élève, la machine construit une sous-arborescence qu'elle va rattacher à l'arborescence en construction. C'est au moment de ce rattachement que la machine recherche les erreurs commises par l'élève en utilisant le mécanisme de détection incrémentale d'erreurs qui est décrit dans (Giroire, Le Calvez, Duma, Tisseau, and Urtasun 2002).

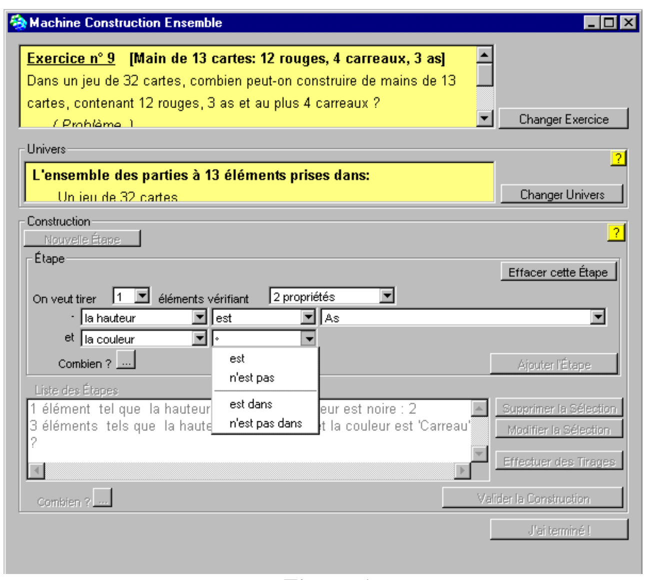


Figure 1

Détection des erreurs

Dans une interface pédagogique, il faut pouvoir laisser à l'élève la possibilité d'exprimer sa solution et donc de commettre des erreurs mais seulement celles qui sont "intéressantes" du point de vue pédagogique. Dans le projet Combien?, nous avons restreint le domaine en contraignant l'élève à l'utilisation d'une méthode de résolution (la méthode constructive). Nous avons éliminé une famille d'erreurs inintéressantes en contrôlant l'interface (menus déroulants dynamiquement construits, autorisation d'utilisation de boutons, séquencement...). Nous avons pu ainsi établir une liste d'erreurs possibles pour chaque machine (certaines erreurs étant communes à plusieurs machines).
Nous avons associé à tous les types d'erreurs répertoriés des schémas d'erreurs. Ceux-ci sont définis par une arborescence (pattern) dans laquelle les nœuds sont valués par des variables et une condition reliant certaines de ces variables. A chaque ajout d'une sous-arborescence (partie de solution créée par l'élève), la machine recherche dans sa base les schémas d'erreur qui sont pertinents dans le contexte correspondant. Pour chacun de ces schémas, elle regarde si le pattern s'apparie avec la sous-arborescence ajoutée. Dans ce cas elle cherche si la condition du schéma

est vérifiée par les objets qui instancient les variables du pattern liées par la condition. S'il en est ainsi une erreur a été commise.
Une base de schémas d'erreurs est associée à chacune des machines. Toutes les machines sont construites suivant le même modèle et possèdent leur propre base d'erreurs.

Expérimentations

Nous avons fait trois types d'expérimentations en parallèle. Pour chacune des expérimentations la machine présentée est la machine "Construction-ensemble" pourvue d'une dizaine d'exercices. La liste des exercices est ordonnée par ordre de difficulté croissante.

Conditions d'expérimentation

Le manuel de présentation est disponible en ligne mais aussi sous forme papier. En ligne les pages sont accessibles de façon contextuelle par la commande "?". Dans toutes les expérimentations la machine a été proposée comme un outil de résolution de problèmes de dénombrement. Nous avons demandé aux expérimentateurs d'exprimer à haute voix toutes leurs pensées. L'expérimentation proprement dite a porté sur cette machine, mais les expérimentateurs ont pu voir et utiliser deux autres machines : la machine "Construction-liste" et la machine "Construction-association".

Public cible : des élèves de terminale

Nous avons procédé à deux expérimentations différentes. Le premier groupe de trois élèves, n'avait pas abordé les dénombrements. Ils se sont tout de suite lancés dans l'utilisation de l'interface. Ils ont considéré cela comme un jeu de découverte et ont eu beaucoup d'échanges entre eux. Ils n'ont pratiquement pas utilisé l'aide. Ils se sont pris au jeu et ont résolu tous les exercices alors que nous pensions qu'ils n'en résoudraient que quelques-uns. Les élèves ont demandé à faire d'autres exercices correspondants à d'autres classes d'exercices. C'est à ce moment là qu'on leur a montré les autres machines. Ces élèves sont arrivés pour le cours en sachant résoudre les exercices de la classe correspondant à la machine "Construction-ensemble" et en ayant une idée de la façon de résoudre les exercices des autres classes.
Le deuxième groupe de trois a travaillé avec la machine après avoir eu cinq heures d'exercices de dénombrement, sans véritable "cours" en classe. Bien que ce soient des élèves moins attirés par les mathématiques ils ont été plus rapides et ont eu le même plaisir à résoudre les exercices.
Dans les deux groupes, les élèves ont commencé par se focaliser sur la valeur numérique à obtenir, puis se sont intéressés à la démonstration que la machine les conduisait à faire. Dans les derniers exercices ils ne s'intéressaient plus à cette valeur numérique mais se focalisaient sur la définition des différentes étapes de la démonstration.

Public cible : les experts du domaine

Les professeurs de mathématiques enseignant les dénombrements ont eu plus de mal que les élèves à suivre la méthode induite par les machines. En effet leur enseignement n'aboutit pas à l'utilisation systématique de cette méthode. Cela les a obligés à changer leur façon de raisonner. Pour les premiers problèmes de la liste, ils auraient volontiers donné le nombre résultat directement sans en donner une justification. Pour les problèmes plus délicats de la même classe, ils ont apprécié le fait de devoir justifier chaque étape.

Validation des interfaces par un ergonome

Le but de cette expérimentation était de valider l'interface du point de vue ergonomique. L'ergonome a commencé par tester systématiquement le comportement de l'interface sans s'occuper de dénombrement. Puis finalement s'est pris au jeu et s'est forcé à résoudre.

Conclusion

Les trois types d'expérimentateurs ont apprécié l'apparence de l'interface machine "Construction-ensemble" et le fait que cette même apparence se retrouve dans les autres machines. Cela permet d'appréhender les concepts sous-jacents. Ils ont réalisé l'intérêt de la méthode car cela leur a permis de résoudre des exercices dont la solution n'était pas évidente. Ils ont résolu tous les exercices dans l'ordre de la liste, ce qui ne leur était pas imposé. Ils ont tous apprécié la progression qui leur a permis au départ de se familiariser avec l'outil et ensuite de se concentrer sur les difficultés des problèmes.
Un des buts de notre approche est d'apprendre aux élèves qu'il faut "démontrer" un résultat et qu'utiliser une méthode systématique permet de résoudre des problèmes de plus en plus difficiles. Notre logiciel s'est avéré un bon outil pour apprendre aux élèves à justifier leurs résultats numériques dans les problèmes de dénombrement.

Références

Giroire, H.; Le Calvez, F.; Duma, J.; Tisseau, G.; and Urtasun, M. 2002. Un mécanisme de détection incrémentale d'erreurs et son application à un logiciel pédagogique. Actes de RFIA 2002, 1063-1072. Angers.

Le Calvez, F.; Urtasun, M. ; Tisseau, G.; Giroire, H. and Duma, J. 1997. Les machines à construire : des interfaces pour apprendre une méthode constructive de dénombrement. 5èmes Journées francophones EIAO, 49-60. Baron, Mendelsohn, and Nicaud eds, Hermès.

Tisseau, G.; Giroire, H.; Le Calvez, F.; Urtasun, M.and Duma, J. 2000. Design principles for a system to teach problem solving by modelling. Lecture Notes in Computer Science N° 1839, ITS'2000, 393-402. Montreal, Springer-Verlag.